César Saal Riqueros
Edwin Mejía Rodrigo
Miguel Meza Pinto

Cálculo diferencial en una variable
(enfoque vectorial)

Volumen 1

- **Funciones**
- **Límites y continuidad**
- **Derivada**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Editorial Universitaria

Primera edición, abril 2016
500 ejemplares

Cálculo diferencial en una variable (enfoque vectorial). Volumen 1.

Impreso en el Perú
Printed in Peru

Universidad Nacional de Ingeniería
Editorial Universitaria

Av. Túpac Amaru 210, Rímac – Lima
Pabellón Central / Sótano
Telfs. 4814196 / 4811070 anexo 215
Correo-e: eduni@uni.edu.pe
Jefe EDUNI: Prof. Álvaro Montaño Freire
Coordinador Editorial: Nilton Zelada Minaya

Impreso por Jw Impresiones SAC
Av. Manuel Segura 776 Lince, Lima

ISBN 978-612-4072-73-4

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-02086

A Mary mi amor, por su comprensión, y a Marita, como muestra de perseverancia.

A los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería, por los diversos aportes académicos brindados.

A los estudiantes y colegas de la Universidad Nacional del Centro, por su permanente preocupación sobre la formación matemática en las carreras de ingeniería.

César

A Aurora, que siempre me ha alentado con su amor y comprensión.

A mis hijos Sheyla y Andrés que son la luz de mi travesía.

A mis maestros, de los que aprendí lo valioso que es el cultivo de las ciencias, y a mis alumnos, quienes están siempre preocupados en la búsqueda de la verdad.

Edwin

A mis maestros y estudiantes, de quienes aprendí.

Miguel

Índice

CAPÍTULO 2

Prólogo

Cuando los profesores Cesar Saal Riqueros, Edwin Mejía Rodrigo y Miguel Meza Pinto me pidieron darle una lectura –en realidad una revisión– a este libro, pensé encontrar un tratamiento breve de la parte teórica y luego una colección de ejercicios y aplicaciones más o menos conocido. Sin embargo, la situación fue distinta. La parte teórica está desarrollada con bastante rigor y prolijidad; más aún, en los conceptos fundamentales de límite y de derivación los autores presentan interpretaciones originales –de esta manera enriquecen la idea geométrica de estos conceptos– y son generosos en la presentación de ejercicios y aplicaciones, ello significa que se han dado el trabajo de buscar y crear ejercicios y aplicaciones en cada concepto y en cada propiedad matemática y de distintos niveles de dificultad.

Debo mencionar en un aparte las aplicaciones de la economía y la física que desarrollan los autores, por lo que pienso que su obra tiene personalidad propia y será de gran ayuda no solo para los estudiantes en el tema de cálculo diferencial en una variable sino a cualquier interesado en aprender el cálculo diferencial en su parte teórica y en sus aplicaciones.

Alejandro Hidalgo Gordillo

Introducción

La presente obra, *Cálculo diferencial en una variable*, ha sido desarrollada en su aspecto teórico desde un punto de vista novedoso: el enfoque vectorial.

La idea básica para haber abordado el cálculo diferencial en una variable con este novedoso enfoque, nació de tratar de mostrar a nuestros estudiantes que la matemática es una sola: que a nivel de un primer curso de matemática puede resolverse problemas de derivadas con vectores y problemas de vectores con derivadas; convirtiendo de este modo a la matemática convencional en una herramienta más potente, pues no tiene distingos al momento de su aplicación.

Este enfoque nos permitió encontrar nuevos caminos para incorporar otros tipos de problemas a la enseñanza aprendizaje de la matemática, tales como realizar la demostración, a partir de la definición vectorial propuesta, de los problemas de derivación implícita.

Podemos notar que con este enfoque se obtienen ciertas contribuciones, como al efectuar la “verticalización” o la “horizontalización” de un vector y deducimos vectorialmente –de una manera sencilla y breve– las fórmulas de las rectas asíntotas oblicuas y verticales, así como de las asíntotas curvas.

Aún más, son tantas las bondades y atributos de este enfoque, que él se puede extender fácilmente al caso de funciones de varias variables con la finalidad de fundamentar de una manera clara y sencilla la definición de las derivadas parciales.

Por otro lado, como el interés que nos guía es el de mejorar la enseñanza aprendizaje de la matemática, hemos considerado necesario distribuir la presentación de los ejemplos y ejercicios de acuerdo a los siguientes criterios:

Criterio de dificultad. Los problemas están clasificados desde el más simple (nivel 1) hasta el más difícil (nivel 3).

Criterio de estrategias de solución. En muchos problemas, se elabora un “mapa” de los pasos a seguir para llegar a la solución.

Criterio de afinidad con la especialidad del estudiante. Muchos problemas han sido clasificados de acuerdo a las distintas especialidades que se dan en nuestras universidades.

Esta presentación nos trajo consigo varias interrogantes:

¿Qué matemática debemos brindar a nuestros estudiantes?

¿Qué debemos enseñar?¿Qué deben aprender?

Nosotros consideramos que la enseñanza–aprendizaje de la matemática va mas allá de resolver un problema fácil o difícil; en otras palabras, que va mas allá de que el problema está relacionado o no con la especialidad.

Lo que creemos firmemente es que la matemática desempeña un doble papel en todo el proceso de formación profesional de nuestros estudiantes: como herramienta de transformación de la ciencia en tecnología y como formadora del pensamiento.

En el primer caso, tenemos que por ser la matemática teoría y praxis, se utiliza como herramienta que nos ayuda a construir modelos en todos los campos donde se aplica, mediante leyes y procesos que sirven para transformar las ciencias en teorías, tecnologías y técnicas que van en beneficio de la sociedad, pasando la teoría a formar parte de la experiencia vivida.

A su vez es innegable que la matemática es también una ciencia formadora de pensamiento, ya que ella contiene diversos temas que al ser enfocados de manera adecuada permiten al estudiante desarrollar e integrar los pensamientos deductivo, inductivo, creativo, divergente, convergente, crítico, sistemático, interrogativo y analítico.

Por lo tanto, el aprendizaje de la matemática es fundamental para el desarrollo de todos los procesos y actividades intelectuales creadas por la mente, por ello debemos ponernos como visión-misión brindar una formación académica que vaya más allá de los tiempos que vivimos; que en su aspecto básico contribuya al desarrollo de los siguientes tipos de pensamiento:

a) *El pensamiento divergente-convergente,* de modo que en el aula se pueda analizar diversos enfoques que conduzcan a resolver un mismo problema por diferentes caminos para llegar al final a un único resultado.

b) *El pensamiento interrogativo*, que los lleve a indagar en el por qué de las cosas, de modo que la enseñanza–aprendizaje no sea aceptada por sumisión sino por discusión.

c) *El pensamiento crítico*, que compare dentro de un problema lo que se tiene (la teoría y los datos) con lo que se pide, de modo que se pueda formular una “estrategia de solución”.

d) *El pensamiento sistemático*, que a través de las “estrategias de solución” los lleve a construir una cadena de implicaciones que conduzcan de manera ordenada a encontrar soluciones a los problemas planteados.

e) *El pensamiento deductivo*, donde los capacitemos en efectuar las respectivas deducciones de muchos de los teoremas que se desarrollan en los cursos de matemáticas.

Por ejemplo, tenemos la deducción del dominio de una función dada, de una composición, de la inversa de una función; de la derivada de la función inversa; etc.

f) *El pensamiento inductivo*, donde aprenda a extraer conclusiones que posteriormente deben ser demostradas. Por ejemplo, tenemos la deducción e inducción de una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares, de una fórmula para las derivadas n-esimas de ciertas funciones racionales, etc.

h) *El pensamiento creativo*, para lo cual la matemática es rica en procesos, tales como los cambios de variable en los límites, en las derivadas y las integrales; se logra con ello encontrar caminos que conduzcan a soluciones buenas y en el menor tiempo posible (eficacia y eficiencia).

i) *El pensamiento analítico*, de modo que los estudiantes puedan afrontar con éxito los problemas que se les pueda presentar en el trayecto de su vida.

Dentro de la matemática tenemos tantos recursos en procesos y actividades, que pretendemos contribuir al logro de estos pensamientos a través de la obra que presentamos, en la cual desarrollamos el cálculo diferencial en una variable desde un enfoque vectorial.

Para finalizar queremos agradecer al Licenciado Alejandro Hidalgo Gordillo, profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, quien tuvo a su cargo la revisión de la presente obra. También a los profesores: Manuel Arévalo Villanueva, Armando Cajahuaringa Camaco, Elías Soto Zubieta, Oscar Reynaga Alarcón, Jairo Esquivel Ortiz, Juan Herrera García, Gloria Espinoza Colan, Ramiro Febres Tapia y Luis Bustamante Donayre por las sugerencias y problemas alcanzados.

Los autores

CAPÍTULO 1

Funciones

ANÁLISIS EPISTÉMICO DE LA TEORÍA DE FUNCIONES

La denominación función se debe G. Leibniz, pero su concepto recién se conoció en los siglos XVIII y XIX, debido a la necesidad de contar con una clase cada vez más grande de relaciones funcionales que permitiesen obtener una mayor generalización de conceptos, cubriendo de este modo las exigencias de la nueva matemática inventada: **el cálculo**.

De este modo, la teoría de funciones se convirtió en la conexión natural entre el método cartesiano y el cálculo infinitesimal, y trajo consigo su **aritmetización**, lo cual facilitó el desarrollo de las matemáticas, de la física y de las ciencias en general.

Hubo tres fases históricas por las cuales pasó la construcción del concepto de función:

1. **La función vista como dependencia**. Esta etapa duró aproximadamente hasta el siglo XVII de nuestra era, donde su principal debilidad fue la carencia de símbolos adecuados para cuantificar las relaciones encontradas. Representantes de esta etapa son **Nicole Oresme** (**latitud de las formas:** describe la construcción de la gráfica de una cantidad variable dependiente del tiempo para el caso de una recta); **René Descartes:** gracias a su geometría se llegó a la representación gráfica de función, aunque confundió dicha representación gráfica con la función en sí; **Isaac Newton:** en su cálculo de fluxiones (derivadas) llegó a la misma conclusión que Descartes, al considerar magnitudes cuya variación depende del tiempo; pero su idea fue más clara debido a que se dio cuenta que los resultados siguen siendo los mismos cuando la variable dejaba de ser el tiempo y se convertía esta en una nueva variable; **G.W. Leibniz:** creó la denominación "función" y el simbolismo correspondiente, debido a que tenía la noción general de

dependencia funcional; expresando de esta manera la función como una magnitud dependiente de las coordenadas de los puntos y escribiéndola en general como $f(x, y) = 0$.

2. La función considerada como expresión analítica. En esta etapa, del siglo XVII hasta el siglo XVIII, la preocupación estuvo centrada en desarrollar un álgebra de funciones, de modo que se pudiese operar con expresiones concretas. Representantes de esta época son: **Jo. Bernoulli:** en una de sus obras, propone considerar una función como una expresión analítica. **L. Euler:** en el siglo XVIII, en su *Introductio in analysin infinitorum*, tomo 1 (obra considerada como la piedra angular del nuevo análisis), realiza un estudio descriptivo de las funciones; considerando a ellas como serie de potencias de la forma:
$f(z) = a_o + a_1.z + a_2.z^2 + ...$, donde z es real o complejo y su definición está limitada al tipo de funciones analíticas.

En esta misma obra, realiza el estudio de las funciones trigonométricas, trascendentes, logarítmicas; clasificando a las funciones según sus propiedades; introduciendo de este modo las funciones univalentes, pares, impares, etc. **Lagrange:** en los apuntes que preparó para el dictado de sus clases expresa una función como combinación de magnitudes.

3. La función considerada como relacional. En esta etapa, del siglo XVIII al siglo XIX, la necesidad de los matemáticos estuvo centrada en mejorar el concepto que se teníabuscando nuevas concepciones para entender lo que representa y significa una función. Sus principales representantes son: **Lacroix**, **B. Bolzano**, **A. Cauchy**.

Este último, en su libro *Curso de Análisis*, da un concepto de función que no difiere mucho del dado por Euler, hace un estudio de las funciones elementales tanto de variable real como de variable compleja que traen un nuevo enfoque: el de analizar las relaciones generales entre causas (variables) y efectos (funciones). Cauchy **considera la función como una "relación de causa–efecto"** e inventa de este modo la teoría de las funciones como un estudio abstracto relacional.

Peter Gustav Dirichlet: fue profesor de Riemann, Dedekind, Kronecker, etc. En 1829 estableció el concepto general de función, al afirmar en una de sus obras: **"función es toda correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera que sea la manera de establecerla"**, lo que en la actualidad interpretamos como: Una función f es una correspondencia en la que a cada x de un cierto intervalo de números reales se le hace corresponder un único f(x), cualquiera que sea la manera de establecerla.

1.1 INTRODUCCIÓN

Las funciones son un tipo especial de relación binaria, de entrada–salida: siendo ellas la base de la construcción del cálculo diferencial e integral, y de muchas otras herramientas matemáticas que cubren una gran variedad de aplicaciones, incluyendo la informática.

1.2 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, denominaremos función f de A en B (denotado por $f: A \to B$) a toda relación $f \subset A \times B$ que cumple con la condición: **Para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.**

Tengamos presente que la afirmación $(x,y) \in f$ se denota por $y = f(x)$ e interpreta como: "y" es la imagen de "x", mediante f.

Comentario:

Para el caso en que $A = \emptyset$, decimos que f es la función vacío (función trivial); pero si $B = \emptyset$, afirmamos que no existe función.

1.2.1 Características de una función

Como toda función es una relación, pero no toda relación es función; veamos cuando una relación se transforma en función:
La relación $f: A \to B$ es una función si y solo si cumple dos requisitos:

i) Debe ocurrir que el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados $(x, y) \in f$ sea igual al conjunto de partida A; esto permite definir el dominio de una función f como:

Dominio de f = Domf = $\{x/(x, y) \in f\} = A$ = conjunto de partida de la relación.

ii) Si existen dos o más pares ordenados con el mismo primer elemento, entonces debe ocurrir que los segundos elementos son iguales, es decir:

Si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, entonces debe cumplirse que $y_1 = y_2$.

Conclusión:

$f: A \to B$ es función $\Leftrightarrow$ **i)** Domf = A y **ii)** $[(x, y_1) \in f \text{ y } (x, y_2) \in f\,] \Rightarrow y_1 = y_2$

1.2.2. Modo de comprobar si una relación es función

Dada la relación $f: A \to B$, ella puede ser o no función. Si para f ocurre alguna de las afirmaciones que siguen:

iii) Existe por lo menos un elemento x de A tal que (x,y) no está en f. [Domf $\subset$ A].

iv) Existen dos pares ordenados $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, de modo que $y_1 \neq y_2$.

Entonces afirmamos que f no es función

Ejemplo 1

Sea f: A $\rightarrow$ B, A = {–1, 2, 4, 7} y B = Z; donde f = {(2, 0), (–1, 3), (4, 5), (7, 8)}.

Afirmamos que f es una función de A en B, ya que cumple con las dos características de una función.

Ejemplo 2

Pero el conjunto g: A $\rightarrow$ B tal que g = {(2, 0), (–1, 3),(7, 8)}, donde A y B son los conjuntos anteriores, no es una función: No cumple la condición Domg = A.

1.3 RANGO O IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Está dado por el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados (x, y) $\in$ f; es decir:

Rango de f = Ranf = Rf =Imag(f) = {y/ (x, y) $\in$ f }= {f(x)/ x $\in$ Domf = A}.

En general, si f: A $\rightarrow$ B, se cumple que:

Ranf = Conjunto de imágenes= Imag(f) $\subset$ B.

Para la función estudiada f: A $\rightarrow$ B, tenemos que:

A = Dominio de f = Conjunto de partida = Conjunto de pre imágenes.

B = Conjunto de llegada (contiene al conjunto de imágenes).

Comentarios:

a. La expresión (x, y)$\in$ f, puede escribirse como y = f(x), igualdad a la cual se le llama regla de correspondencia y se interpreta afirmando que **f** transforma **x** en **y**.

Esta misma regla nos permite afirmar que: y depende de x, siendo por lo tanto y la variable dependiente e x la variable independiente.

Ejemplo 1

Dados los conjuntos A = {–1, 0, 2, 3, 4}, B = {0, 2, 4, 6, 8, 9} y dada la función

f: A $\rightarrow$ B tal que f = {(–1,2), (0, 0), (4, 4), (3, 6), (2, 8)}; notamos que:

Ranf = Imag(f) = {0, 2, 4, 6, 8}.

Ejemplo 2

La siguiente ecuación $y = f(x) = x^2 - 3$ representa la regla de correspondencia de cierta función. Notamos, por ejemplo, que si $x = 2$, entonces $y = f(2) = 1$; es decir f transforma $x = 2$ en $y = 1$, mediante la regla $y = f(x) = x^2 - 3$.

b. Las funciones reciben también el nombre de aplicaciones o transformaciones.

c. Afirmamos que una función está bien determinada cuando se conoce su dominio y su regla de correspondencia, (asumimos que el conjunto de llegada es el rango de f).

Si no se conociese el dominio, se asume que este es el mayor conjunto que contiene a aquellos elementos que satisfacen las condiciones de existencia de las operaciones que intervienen en la regla de correspondencia.

d. Si $A \subset R$ y $B \subset R$, afirmamos que f es una función real de variable real. Funciones de este tipo estudiaremos a lo largo de este texto.

NIVEL 1

Ejercicio 1

Dada la función f definida por $y = f(x) = x^2 - 2x$, calcule:

a) $f(a)$ **b)** $f(a + 1)$ **c)** $f(x + 1)$ **d)** $f(2b)$ **e)** $f(2x)$

Resolución:

Del dato $y = f(x) = x^2 - 2x$, obtenemos:

a) $f(a) = a^2 - 2a$.

b) $f(a + 1) = (a + 1)^2 - 2(a + 1) = a^2 - 1$.

Comentario:

Una forma más sencilla es: Partir de $y = f(x) = x^2 - 2x$ y completar cuadrados:

$y = f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$; luego: $f(a + 1) = (a + 1 - 1)^2 - 1= a^2 - 1$.

c) De acuerdo a lo anterior: $f(x + 1) = x^2 - 1$.

d) Tenemos $f(2b) = (2b)^2 -2(2b) = 4b^2 - 4b$.

e) Ahora $f(2x) = 4x^2 - 4x$.

Ejercicio 2

Dada la función f definida por $y = f(2x - 3) = x^2 - 2x$, calcule:

a) $f(a)$ **b)** $f(a - 1)$ **c)** $f(x - 1)$ **d)** $f(2b)$ **e)** $f(2x)$

Resolución:

- **Primera forma**

  Para calcular lo pedido, calculamos f(x), para lo cual efectuamos el cambio de variable: $2x - 3 = z$, de donde $x = \dfrac{z + 3}{2}$

  Nos queda la regla:

  $y = f(2x - 3) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \Rightarrow y = f(z) = (\dfrac{z + 3}{2} - 1)^2 - 1$

  Reemplazando la variable z por una nueva variable x, queda:

  $y = f(x) = (\dfrac{x + 3}{2} - 1)^2 - 1$

  Simplificando resuta $y = f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{4} - 1$ o también $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4}$

- **Segunda forma**

  Efectuamos cambios de variable sucesivos, tal como pasamos a indicar:

  $f(2x - 3) = x^2 - 2x \Rightarrow f(2 \cdot \dfrac{x}{2} - 3) = (\dfrac{x}{2})^2 - 2 \cdot \dfrac{x}{2} \Rightarrow f(x - 3) = \dfrac{x^2}{4} - x$

  $\Rightarrow f(x + 3 - 3) = \dfrac{(x + 3)^2}{4} - (x + 3) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4} = \dfrac{(x + 1)^2}{4} - 1$

  En cualquier caso, pasamos a responder las preguntas:

a) $f(a) = (\dfrac{a + 1}{2})^2 - 1$

b) $f(a - 1) = \dfrac{(a - 1 + 1)^2}{4} - 1 = \dfrac{a^2}{4} - 1$

c) A partir de (b): $f(x - 1) = \dfrac{x^2}{4} - 1$

d) $f(2b) = \dfrac{(2b + 1)^2}{4} - 1$

e) $f(2x) = \dfrac{(2x + 1)^2}{4}$

Ejercicio 3

Sean $A = \{-3, 0, 1, 2, 5\}$ y $B = R$. Calcule a y b para que la relación $f: A \to B$ dada por $f = \{(-3,1), (0,a - 2b), (2,4), (1,a - 2b), (b,5), (0, 7)\}$ sea una función.

Resolución:

Para que f sea una función, debe cumplirse las dos características siguientes:

i) $\text{Domf} = \{-3, 0, 1, 2, b\} = A = \{-3, 0, 1, 2, 5\} \Rightarrow b = 5$.

ii) No existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento:

Lo anterior nos indica que: $(0, a - 2b) = (0, 7) \Rightarrow a - 2b = 7 \Rightarrow a = 17$.

Finalmente se tiene $a = 17$, $b = 5$.

Ejercicio 4

Determine el dominio de las siguientes funciones, definidas por:

a) $g(x) = 2x + \dfrac{4}{x-2} - 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{3x-4}$

Resolución:

a) Analicemos la existencia de la operación que interviene. Para que exista la operación división, el denominador debe ser no nulo; es decir:

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow \text{Dom } g = R - \{2\}$.

b) Al igual que el caso anterior: $3x - 4 \neq 0$, de donde $x \neq 4/3$; luego:

$\text{Dom } f = R - \{4/3\}$.

NIVEL 2

Ejercicio 5

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{2x^2}{2 + x^2}$. Determine el dominio de la función dada y demostrar que dicha función es no negativa, es decir que $f(x) \geq 0$.

Resolución:

La operación división existe cuando $2 + x^2 \neq 0$, lo cual es cierto $\forall\, x \in R \Rightarrow \text{Domf} = R$.

Pasamos a efectuar la demostración pedida $f(x) \geq 0$.

Sabemos que $x^2 \geq 0 \Rightarrow 2 + x^2 \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{2 + x^2} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \dfrac{2x^2}{2 + x^2} \leq x^2$.

De lo anterior, se tiene: $0 \leq \dfrac{2x^2}{2+x^2} = f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0$, luego f es no negativa.

Ejercicio 6

Determine el dominio de cada una de las funciones definidas mediante:

a) $g(x) = \dfrac{x^3+1}{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}$ **c)** $g(x) = \log(2x-5) + x - 3$

Resolución:

a) Para la existencia de la operación raíz cúbica: Siempre existe, entonces $x \in R$.

Por otro lado, la existencia de la operación división está relacionada con:

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$, de donde: $(x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ y $x \neq 3$; con lo cual:

$Domg = R - \{2, 3\}$.

b) Para la existencia de la operación raíz cuadrada:

$x^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0$

$\Rightarrow (x+1)((x-1/2)^2 + 3/4) \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ ... (1)

Para la existencia de la operación raíz cúbica: Siempre existe, luego $x \in R$ .... (2)

Por otro lado, la existencia de la operación división está relacionada con:

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$, de donde: $(x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ y $x \neq 3$ ... (3)

Finalmente para que exista la función es necesario y suficiente que se cumplan las tres condiciones anteriores; así tenemos de (1), (2) y (3) que:

$x \in [-1, +\infty[- \{2, 3\} = Domf$.

c) La existencia de la operación logaritmo está relacionada con:

$2x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5/2$. Luego $Dom\ g =]\ 5/2, +\infty[$.

NIVEL 3

Ejercicio 7

Determine el dominio de cada una de las funciones definidas mediante:

a) $f(x) = \left(\dfrac{2x^2}{x-5}\right) + x\ln\left(\dfrac{2}{x-4}\right)$ **b)** $f(x) = \dfrac{2}{4-x^2} + x\ln(x^3 - x)$

Resolución:

a) Para la existencia de:

$\frac{2x^2}{x-5}$: $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$ .... (1)

Para la existencia de:

$\ln(\frac{2}{x-4})$: $\frac{2}{x-4} > 0 \Rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ .... (2)

Finalmente, para que exista la función f es necesario y suficiente que se cumplan (1) y (2) de manera simultánea; es decir debe cumplirse que Domf = $]4,+\infty[- \{5\}$.

b) Para la existencia de:

$\frac{2}{4-x^2}$: $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ .... (1)

Para la existencia de $\ln(x^3 - x)$:

$x^3 - x > 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$ .... (2)

Para que exista la función f debe de cumplirse de manera simultánea (1) y (2), así tenemos que Dom f = $]-1,0[\cup]1,+\infty[- \{2\}$.

Ejercicio 8

Determine el dominio de la función definida por $f(x) = x\sqrt[3]{\ln\frac{5x-x^2}{4}} + 5$

Resolución:

Es inmediato que $5x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x < 0 \Rightarrow x \in]0,5[$, luego Domf = $]0,5[$.

Ejercicio 9

Determine el dominio de cada una de las funciones definidas mediante:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$ **b)** $f(x) = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$

Resolución:

a) Para la existencia de:

$\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$: $\frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty,-2[\cup [2,+\infty[$ .... (1)

Para la existencia de:

$\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}} : \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}} \geq 0 \Rightarrow 1 - x \geq 0 \wedge 1 + x > 0 \Rightarrow x \in\ ]-1,1]$ .... (2)

Para que existan ambas operaciones a la vez, debe ocurrir que x pertenezca a la intersección de (1) y (2), lo cual resulta el vacío. Luego f es la función vacío.

b) Para la existencia del primer logaritmo (logaritmo externo):

$1 - \log(x^2 - 5x + 16) > 0.$

$\Rightarrow \log(x^2 - 5x + 16) < 1 = \log 10$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 16 < 10 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow x \in]2, 3[$ .... (1).

Para la existencia de segundo logaritmo (logaritmo interno), debe ocurrir:

$x^2 - 5x + 16 > 0 \Rightarrow (x - 5/2)^2 + 39/4 > 0$ para todo x .... (2).

De (1) y (2) afirmamos que $x \in]2, 3[$. Luego Domf =] 2, 3[.

Ejercicio 10

Sean A = B = N y sea f definida como sigue f: $A \rightarrow B$ tal que f(x) = x + 2. Demuestre que f es una función.

Demostración:

La demostración estará basada en el análisis de las características de una función.

i) Demostraremos que Dom f = A = N. Para esto necesitamos probar que para todo $x \in A$, existe un $y \in B = N$ tal que f(x) = y.

Veamos:

Sea $x \in A = N$, luego $(x+ 2) = y \in N \Rightarrow x = y - 2, \Rightarrow f(x) = f(y - 2) = (y - 2) + 2 = y$.

Luego como x es un elemento arbitrario de A = N, tenemos que para todo

$x \in A = N$, existe un $y \in B = N$ tal que f(x) = y.

ii) Ahora supongamos que $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, demostraremos que $y_1 = y_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } (x, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = f(x) = x + 2 \\ \qquad\qquad y \\ \text{Como } (x, y_2) \in f) \in f \Rightarrow y_2 = f(x) = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 = (x + 2) - (x + 2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Habiendo demostrado que f cumple las dos condiciones, concluimos que f es una función.

1.4 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para una función real f de variable real, tenemos que su gráfico está dado por la representación geométrica de los pares ordenados de f; es decir:

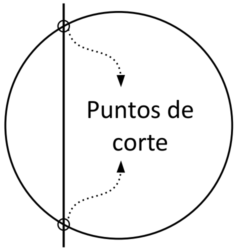
$$\text{Grafo}(f) = \{(x, y) \text{ tal que } y = f(x),\ x \in \text{Domf}\}.$$

1.4.1 Propiedad fundamental

f es una función si y solo si toda recta vertical corta a la gráfica de f a lo más en un punto.

Ejemplos 1

Las circunferencias $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ no representan funciones, tal como observamos a partir del gráfico.

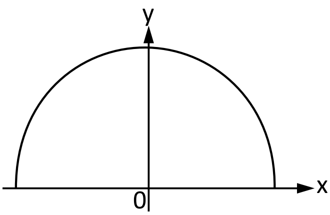


Ejemplo 2

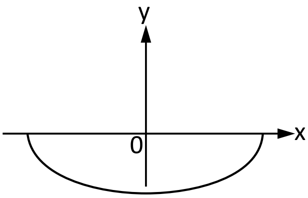
Las elipses y las hipérbolas tampoco son funciones.

Ejemplo 3

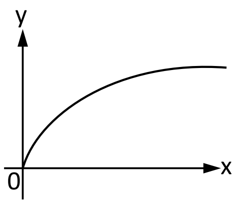
Pero si son funciones:



Una semi–circunferencia



Una semi–elipse



Una semi–parábola

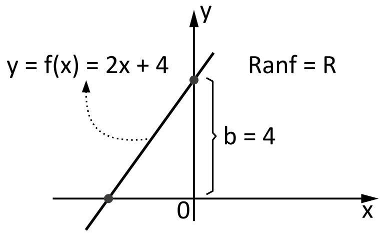
1.5 FUNCIONES ELEMENTALES ALGEBRAICAS Y ESPECIALES

Tenemos los siguientes tipos:

1. Función afín lineal

Regla de correspondencia: $y = f(x) = mx + b$; $m, b \in R$

Dominio = R



Comentario:

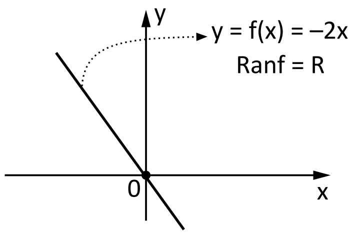
El gráfico de una función afín lineal es una recta de pendiente m (coeficiente de x) y que intercepta al eje y en (0, b), donde b se denomina **ordenada en el origen**.

Casos particulares:

2. Función lineal: Ocurre cuando b = 0

Regla de correspondencia: $y = f(x) = mx$; $m\in R$

Dominio: R



Comentario:

Notamos que si m= 1, se obtiene la función identidad $y = f(x) = x$.

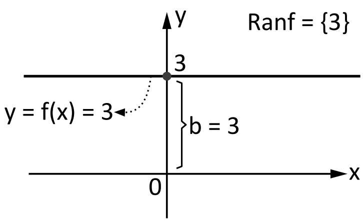
Propiedad fundamental de la función lineal:

Una función $f: R \to R$ es lineal si cumple: $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$, para todo x_1, x_2 del dominio de f; a y b constantes reales.

3. Función constante: Ocurre cuando m = 0.

Regla de correspondencia: $y = f(x) = b$; $b \in R$

Dominio: R

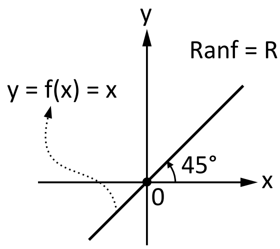


Caso notable. Si b = 0, obtenemos la función nula: y = f(x) = 0, cuya gráfica coincide con el eje x. Ahora si y = f(x) > 0, la gráfica de f está **por encima del eje** x (y = 0); en caso contrario: y = f(x) ≤ 0 , la gráfica **está en el eje x o por debajo de dicho eje**.

4. **Función identidad:** Ocurre cuando m = 1 (y b = 0).

Regla de correspondencia: y = f(x) = x o también I(x) = x

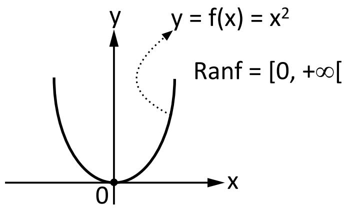
Dominio: R



5. **Función cuadrática**

Regla de correspondencia: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, b y c $\in$ R

Dominio: R



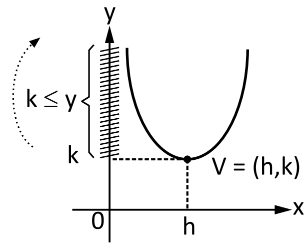
Comentarios:

i) La gráfica de ésta función se denomina parábola, siendo su vértice V(h, k), con

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ y } k = c - \frac{b^2}{4a}$$

ii) Características de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, b y $c \in R$

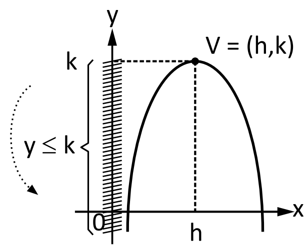
a) Si a > 0, se dice que la parábola se abre **hacia arriba**. El conjunto de imágenes tiene un valor mínimo: y = k



Valor mínimo $y = k$; $k \leq y = f(x)$.

Ranf = $[k, +\infty[$

b) Si a < 0, se dice que la parábola se abre **hacia abajo**. El conjunto de imágenes tiene un valor máximo: y = k



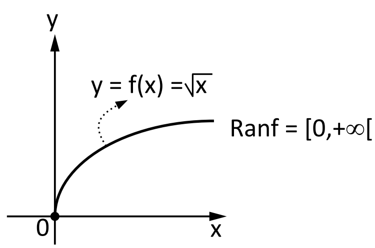
Valor máximo: $y = k$; $y = f(x) \leq k$.

Ranf = $]-\infty, k]$

6. Función raíz cuadrada

Regla de correspondencia: $y = f(x) = \sqrt{x}$

Dominio: R+ = [0,+∞>



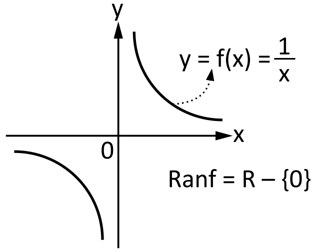
Comentario:

La gráfica de ésta función es una semi–parábola horizontal.

7. Función inverso multiplicativo

Regla de correspondencia: $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

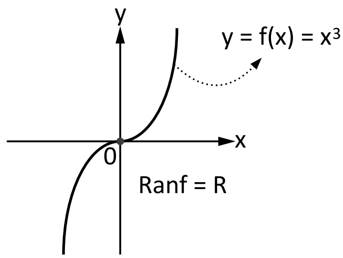
Dominio: R – {0}



8. Función cúbica

Regla de correspondencia: $y = f(x) = x^3$

Dominio: R



9. Función polinómica

Generalización de los casos anteriores:

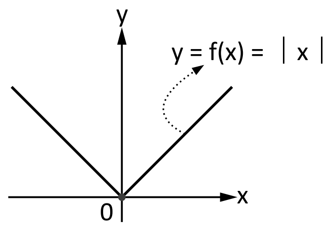
Regla de correspondencia: $y = f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

donde $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in R$; siendo su dominio el conjunto R de los números reales.

10. Función valor absoluto

Regla de correspondencia: $y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ +x, & x \geq 0 \end{cases}$

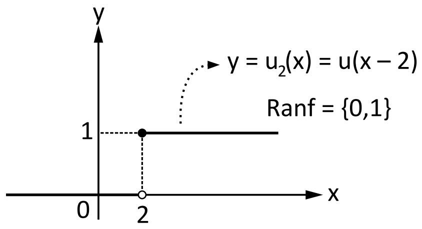
Dominio: R



11. Función escalón unitario

Regla de correspondencia: $y = u_a(x) = u(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$

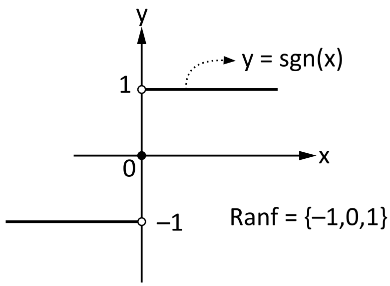
Dominio: R



12. Función signo

Regla de correspondencia: $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$

Dominio: R



13. Función diente de sierra (o rampa)

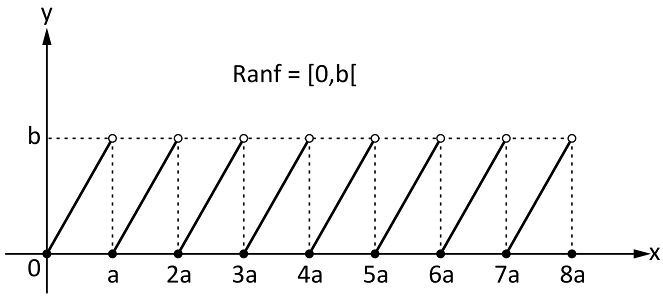
Regla de correspondencia: $y = f(x) = \frac{b}{a}(x - na)$; $x \in [na, (n + 1)a[$; $a > 0$, $n \in Z_0$

Dominio: $[0, +\infty[$; mientras que Rango : $[0, b[$

Ejemplo: Dando valores a n graficar la función anterior.

Resolución:

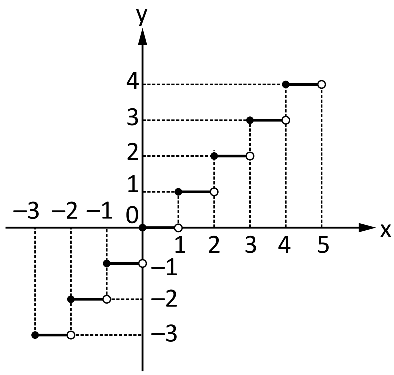
n	x	y
0	[0, a[	(b/a)x
1	[a, 2a[	(b/a)(x –a)
2	[2a,3a[	(b/a)(x – 2a)
3	[3a,4a[	(b/a)(x – 3a)



14. Función máximo entero

Regla de correspondencia: $y = f(x) = [[x]] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1;\ n \in Z$

Dominio: R Rango: Z



Propiedades fundamentales:

i) Sabemos que $[\![x]\!] = n \in Z \Leftrightarrow n \leq x < n + 1; \Leftrightarrow [\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

ii) $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n$, donde $n \in Z$

15. Función potencia racional

A continuación estudiaremos el modelo:

Regla de correspondencia: $y = f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

donde $m \in Z$ y $n \in N$; primos entre si.

Se presentan los siguientes casos, acerca del dominio:

a) Si m y n son impares: Domf = R; Ranf = R.

b) Si m es par y n es impar: Domf = R; Ranf = [0, +∞[.

c) Si m es impar y n es par: Domf = [0, +∞[; Ranf = [0, +∞[.

16. Función potencia irracional

A continuación estudiaremos el modelo:

Regla de correspondencia: $y = f(x) = x^p$, donde p es un número irracional.

Dominio f = [0, +∞[.

NIVEL 1

Ejercicio 1

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

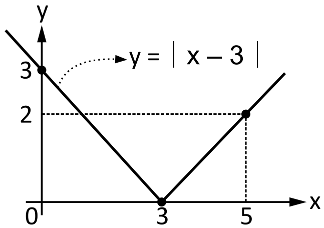
$f(x) = |x - 3|$.

Resolución:

Por definición $f(x) = \begin{cases} +(x-3), & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -(x-3), & \text{si } x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Tenemos que Domf = R y para efectuar la gráfica tabulamos unos cuantos valores:

x	y
0	3
3	0
5	2



Del gráfico se tiene:

Ranf = [0, +∞[, ya que $y = |x - 3| \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[\Rightarrow$ Ranf = [0, +∞[

Ejercicio 2

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

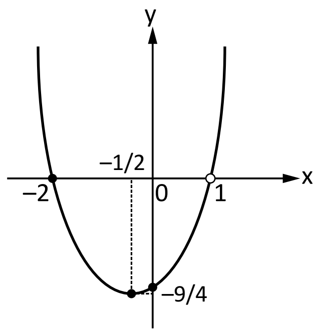
Resolución:

Domf = R – {1}, simplificamos:

$f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)/(x - 1) = x^2 + x - 2 = (x + 1/2)^2 - 9/4$.

Luego la gráfica de f es una parábola que se abre hacia arriba, con vértice en (–1/2, –9/4).

x	$y = (x + 1/2)^2 - 9/4$
–1/2	–9/4
1	0 ($\notin$Domf)
–2	0
0	–2



Del gráfico: Ranf = [–9/4, +∞[, ya que:

$y = (x + 1/2)^2 - 9/4 \geq -9/4 \Rightarrow y \in [-9/4, +\infty[$ = Ranf

Ejercicio 3

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 2 \\ 4 - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

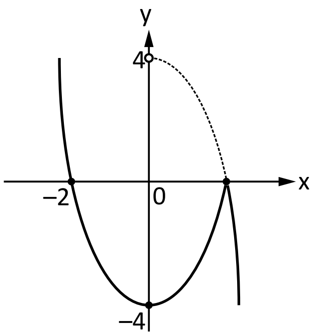
Resolución:

Del dato tenemos que Domf = $Domf_1 \cup Domf_2 =]-\infty, 2[\cup [2, +\infty[= R$.

Para graficar tabulamos valores para cada parte, así tenemos:

x	$y = x^2 - 4$
0	–4
–2	0
→2	→0

x	$y = 4 - x^2$
0	4($\notin$Domf)
2	0
3	–5



Del gráfico: Ranf = R; de manera analítica se tiene:

Para $y = x^2 - 4$. Partimos de $x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$

$$\Rightarrow \text{Ranf}_1 = [-4, +\infty[.$$

Para $y = 4 - x^2$. Partimos de $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow 4 - x^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow \text{Ranf}_1 =]-\infty, 0]$.

Finalmente $\text{Ranf} = \text{Ranf}_1 \cup \text{Ranf}_2 =]-\infty, 0] \cup [-4, +\infty[= R$.

NIVEL 2

Ejercicio 4

Determine el dominio, rango y gráfica de la función definida por:

$g(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Resolución:

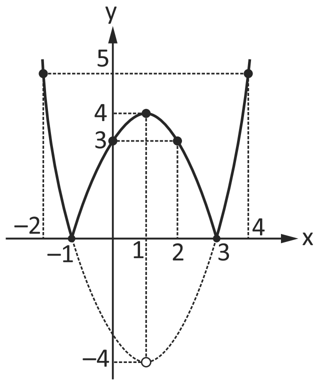
Al completar cuadrados, obtenemos: $g(x) = |(x-1)^2 - 4|$. Aplicamos la definición:

$$g = \begin{cases} +[(x-1)^2 - 4], & (x-1)^2 - 4 \geq 0 \\ -[(x-1)^2 - 4], & (x-1)^2 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 4, & x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[\\ -(x-1)^2 + 4, & x \in]-1, 3[\end{cases}$$

Se deduce que Domg = R. A continuación efectuamos un bosquejo:

x	$y = (x-1)^2 - 4$
1	$-4 (\notin \text{Domg})$
3	0
–1	0
–2	5
4	5

x	$y = -(x-1)^2 + 4$
1	4
2	3



Del gráfico se tiene Rang = $[0, +\infty[$

(Ya que: $|(x-1)^2 - 4| \geq 0 \Rightarrow y = g(x) \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[$)

Ejercicio 5

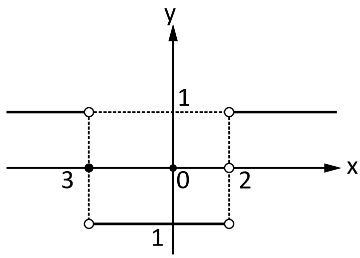
Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

$f(x) = \operatorname{sgn}(\frac{x+3}{x-2})$

Resolución:

Por definición:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\frac{x+3}{x-2}) = \begin{cases} -1, & \frac{x+3}{x-2} < 0 \\ 0, & \frac{x+3}{x-2} = 0 \\ +1, & \frac{x+3}{x-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1, & x \in]-3, 2[\\ 0, & x \in \{-3\} \\ +1, & x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[\end{cases}$$



Por definición tenemos: Domf = R – {2} y del gráfico. Ranf = {–1, 0,1}.

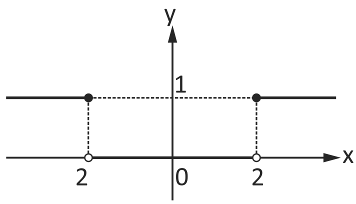
Ejercicio 6

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

$f(x) = u(x^2 - 4)$.

Resolución:

$$f(x) = u(x^2 - 4) = \begin{cases} 0, & x^2 - 4 < 0 \\ 1, & x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \,]-2, 2[\\ 1, & x \in \,]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\end{cases}$$



Observamos que Domf = R y del gráfico: Ranf = {0, 1}.

NIVEL 3

Ejercicio 7

Determine el dominio, rango y gráfica de la función definida por:

$f(x) = [\![kx]\!]$, donde $k \in Z$

Resolución:

En cualquier caso se tiene que Domf = R.

Si $k = 0$, nos queda $f(x) = 0$, para todo $x \in R$.

Si $k \neq 0$ y $k \in Z$, por definición: $f(x) = [\![kx]\!] = n \Leftrightarrow n \leq kx < n + 1$, $n \in Z$; es decir:

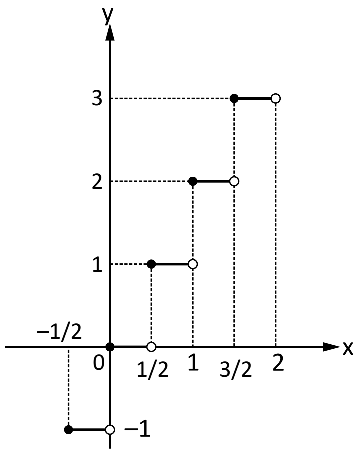
$$f(x) = \begin{cases} [\![kx]\!] = n \Leftrightarrow \dfrac{n}{k} \leq x < \dfrac{n+1}{k}, \; n \in Z; \text{ para } k > 0 \\ \\ [\![kx]\!] = n \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{k} < x \leq \dfrac{n}{k}, \; n \in Z; \text{ para } k < 0 \end{cases}$$

Para graficar, damos un valor a k, sea k = 2, queda:

$$f_1(x) = [\![2x]\!] = n \Leftrightarrow \frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2}, \; n \in Z$$

Tabulando unos cuantos valores:

n	x	y = n
0	[0, 1/2[	y = 0
1	[1/2, 1[	y = 1
2	[1, 3/2[	y = 2
3	[3/2, 2[	y = 3
–1	[–1/2, 0[	y = –1
–2	[–1, –1/2[	y = –2



Observamos el rango de f está dado por: Ranf = Z.

Ejercicio 8

Determine el dominio y rango y trazar la gráfica de la función definida por: $f(x) = \sqrt{[\![x]\!]}$

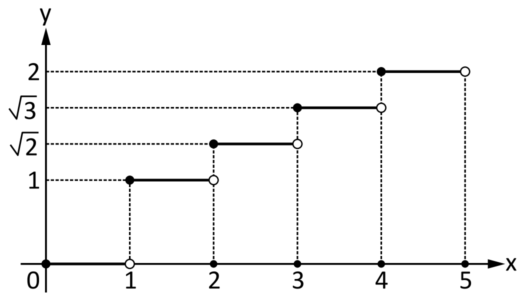
Resolución:

Dominio de f: $[\![x]\!] \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Luego: Domf = $[0, +\infty[$.

Levantamos el máximo entero: $f(x) = \sqrt{[\![x]\!]} = \sqrt{n}$; $n \leq x < n + 1$, $n \geq 0$ y $n \in Z^+$

Tabulamos dando valores a n:

n	x	$y = \sqrt{n}$
0	[0, 1[	y = 0
1	[1, 2[	y = 1
2	[2, 3[	$y = \sqrt{2}$
3	[3, 4[	$y = \sqrt{3}$
4	[4, 5[	y = 2



Se deduce que: Ranf = $\{\sqrt{n} / n \geq 0, n \in Z\}$

Ejercicio 9

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por: $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!]$

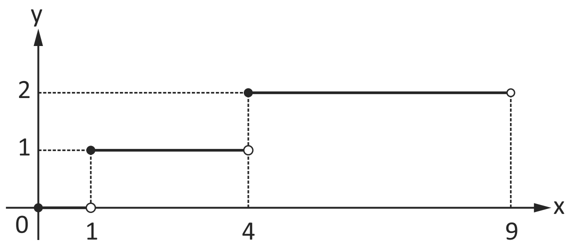
Resolución:

Domf: $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty[\Rightarrow$ Domf $= [0, +\infty[$. Pero: $y = f(x) = \llbracket\sqrt{x}\rrbracket = n \geq 0$

$\Leftrightarrow n \leq \sqrt{x} < n + 1 \Rightarrow n^2 \leq x < (n + 1)^2$, donde $n \geq 0$, $n \in Z$

Pasamos a graficar, para lo cual damos valores a n:

n	x	y = n
0	[0, 1[	y = 0
1	[1, 4[	y = 1
2	[4, 9[	y = 2
3	[9, 16[	y = 3
4	[16, 25[	y = 4



Ranf = $Z^+ \cup \{0\}$

Ranf = $Z^+ \cup \{0\}$

Ejercicio 10

Determine el dominio, rango y trazar la gráfica de la función definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\llbracket -2x \rrbracket}$$

Resolución:

Domf: Para que exista la operación división:

$\llbracket -2x \rrbracket \neq 0 \Rightarrow$ Domf $= R - \{x / \llbracket -2x \rrbracket = 0\}$ .... (1)

Pero $\llbracket -2x \rrbracket = 0 \Leftrightarrow 0 \leq -2x < 1 \Leftrightarrow -1/2 < x \leq 0$.

Reemplazando en (1): Domf $= R -]-1/2, 0]$.

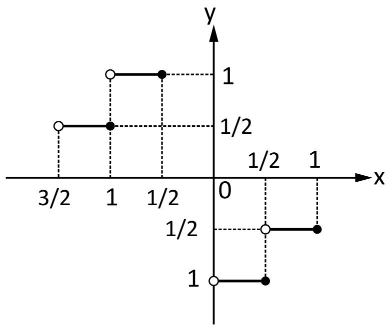
Levantando el máximo entero:

$[\![-2x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq -2x < n + 1 \Leftrightarrow -\dfrac{n+1}{2} < x \leq -\dfrac{n}{2}$, nos queda:

$f(x) = \dfrac{1}{n},\ -\dfrac{n+1}{2} < x \leq -\dfrac{n}{2}$, donde $n \neq 0$.

Pasamos a graficar, para lo cual tabulamos:

n	x	y = 1/n
1	$-1 < x \leq -1/2$	1
–1	$0 < x \leq 1/2$	–1
2	$-3/2 < x \leq -1$	1/2
–2	$1/2 < x \leq 1$	–1/2



Ranf = $\{1/n$ tal que $n \in Z,\ n \neq 0\}$.

1.6 PARIDAD Y PERIODICIDAD DE FUNCIONES

Tenemos dos herramientas fundamentales que nos ayudarán a trazar la gráficas de las funciones, las cuales son:

1.6.1 Paridad de una función

Existen dos tipos de paridad:

a) Función par

Afirmamos que una función f con dominio Domf, es una función par, si se verifican dos condiciones:

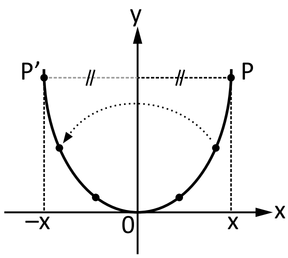
i) Si $x \in$ Domf, entonces $-x \in$ Domf; y

ii) $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in$ Domf. (ésta condición nos indica que la ecuación no cambia al reemplazar x por – x en ella).

Comentario:

Geométricamente, que una función sea par, significa que su gráfica es simétrica con respecto al eje y, tal como se muestra.

Nota que $y = x^2$ es una función par, ya que $y = (-x)^2 = x^2$, donde x e $y - x \in$ Domf = R.



Comentario:

La simetría respecto al eje y, la podemos interpretar afirmando: Un punto P del lado derecho (izquierdo) de la gráfica se refleja en el eje y, apareciendo en la parte izquierda (derecha) como P'.

b) Función impar

Afirmamos que una función f con dominio Domf, es una función impar, si se verifican dos condiciones:

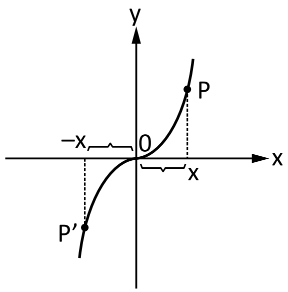
i) Si $x \in$ Domf, entonces $-x \in$ Domf; y

ii) $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in$ Domf. (ésta condición nos indica que la ecuación cambia de signo al reemplazar x por – x en ella).

Comentario:

Geométricamente, que una función sea impar, significa que su gráfica es simétrica con respecto al origen O, tal como se muestra a continuación:

Nota que $y = x^3$ es una función impar, ya que $y = (-x)^3 = -x^3$, donde x y $(-x) \in$ Domf = R.



Propiedades fundamentales

i) La función constante $f(x) = 0$ es una función par e impar.

ii) Una función de la forma f(x)= x^n es **par** si n es un entero **par**, o es una función **impar** si n es un entero **impar**.

Ejemplo 1

Analizar la paridad de la función definida por $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$.

Resolución:

Tenemos que Dom f = R, aplicaremos la definición:

i) Para $x \in$ Dom f = R, se tiene que $-x \in$ Dom f = R.

ii) Ahora $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$ para todo $x \in$ Dom f = R.

Concluimos que f es una función par en todo su dominio.

Ejemplo 2

Analizar la paridad de la función definida por $f(x) = x^3 - 5x$.

Resolución:

Tenemos que Dom f = R, aplicaremos la definición:

i) Para $x \in$ Dom f = R, se tiene que $-x \in$ Dom f = R.

ii) Ahora $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -f(x)$ para todo $x \in$ Dom f = R.

Concluimos que f es una función impar en todo su dominio.

Ejemplo 3

Analizar la paridad de la función definida por $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Resolución:

Tenemos que Dom f = R, aplicaremos la definición:

i) Para $x \in$ Dom f = R, se tiene que $-x \in$ Dom f = R.

ii) Ahora $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) + 2 = -x^3 + 5x + 2$; la cual no es par ni impar.

Concluimos que f no es una función par ni impar.

1.6.2 Periodicidad de funciones

Afirmamos que una función f, con dominio Domf, es periódica si existe un número real fijo $p \neq 0$ tal que:

i) Si $x \in$ Domf, entonces $(x + p) \in$ Domf y

ii) $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in$ Domf.

Comentario:

Al número real fijo p se le llama período de la función f y nos indica que la gráfica se repite cada intervalo consecutivo de ancho p unidades; repitiéndose también en intervalos de ancho 2p, 3p, etc. Al menor de dichos anchos lo llamaremos **período mínimo** o simplemente período.

Ejemplo 1

Analizar la periodicidad de la función definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Resolución:

Aplicaremos la definición:

i) Para $x \in \text{Dom } f = \mathbb{R}$, se tiene que $(x + p) \in \text{Dom } f = \mathbb{R}$.

ii) Ahora $f(x + p) = \operatorname{sen}(x + p) = \operatorname{sen}x.\cos p + \cos x.\operatorname{sen}p$.

Para que sea periódica debe ocurrir $f(x + p) = f(x)$; es decir:

$\operatorname{sen}x.\cos p + \cos x.\operatorname{sen}p = \operatorname{sen}x$; de donde $\cos p = 1$ y $\operatorname{sen}p = 0$; luego el valor mínimo de $p \neq 0$ es $p = 2\pi$. Finalmente afirmamos que el período mínimo es $p = 2\pi$.

Geométricamente, esto nos indica que el gráfico se repite cada 2π unidades.

Ejemplo 2

Analizar la periodicidad de la función definida por $f(x) = \cos x$.

Resolución:

Aplicaremos la definición:

i) Para $x \in \text{Dom } f = \mathbb{R}$, se tiene que $(x + p) \in \text{Dom } f = \mathbb{R}$.

ii) Ahora $f(x + p) = \cos(x + p) = \cos x.\cos p - \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}p$.

Para que sea periódica debe ocurrir $f(x + p) = f(x)$; es decir:

$\cos x.\cos p - \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}p = \cos x$; de donde $\cos p = 1$ y $\operatorname{sen}p = 0$; luego el valor mínimo de $p \neq 0$ es $p = 2\pi$. Finalmente afirmamos que el período mínimo es $p = 2\pi$.

Geométricamente, esto nos indica que el gráfico se repite cada 2π unidades.

1.7 FUNCIÓN CON DOMINIO PARTIDO

Una función puede tener su dominio partido en varias partes, en cuyo caso en cada parte existe una regla de correspondencia.

A modo de ejemplo, una función con dominio partido es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Domf_1 \\ f_2(x), & x \in Domf_2 \\ f_3(x), & x \in Domf_3 \end{cases}$$

donde Dom f = Dom $f_1 \cup$ Dom $f_2 \cup$ Dom f_3

El rango de la función está dado por Ran f = Ran $f_1 \cup$ Ran $f_2 \cup$ Ran f_3.

NIVEL 1

Ejercicio 1

Analizar la paridad de la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^4}$

Resolución:

Tenemos que Dom f = R – {0}, aplicaremos la definición:

i) Para $x \in$ Dom f = R – {0}, se tiene que $-x \in$ Dom f = R – {0}.

ii) Como $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 3}{(-x)^4} = \dfrac{x^2 - 3}{x^4} = f(x)$ para todo $x \in$ Domf = R – {0}, concluimos que f es una función par en todo su dominio.

Ejercicio 2

Analice la paridad de las funciones definidas por:

a) f(x) = senx y **b)** g(x) = cosx

Resolución:

a) Tenemos Dom f = R, aplicaremos la definición:

i) Para $x \in$ Dom f = R, se tiene que $-x \in$ Dom f = R.

ii) Como $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}x = -f(x)$ para todo $x \in$ Dom f = R, concluimos que senx es una función impar.

b) De manera similar al caso anterior, se concluye que cosx es una función par.

Ejercicio 3

Analizar la paridad de la función definida por: $f(x) = x^4 + 2x^2$, $x \in [-4, 5]$

Resolución:

Aplicando la definición:

i) Para $x \in \text{Dom } f = [-4, 5]$, se tiene que $-x \in [-4, 5] = \text{Dom } f$ es falso.

Por ejemplo, para $x = 5 \in \text{Dom } f$, tenemos que $-x = -5 \notin \text{Dom } f$

Concluimos que f no es una función par ni impar.

Ejercicio 4

Analizar la paridad de las funciones definidas por:

a) $f(x) = |x - 5| + |x + 5|$ **b)** $g(x) = x^3\text{sen}x - 3x|x|$

Resolución:

En ambos casos, se tiene Dom f = Dom g = R, aplicaremos la definición:

a) Para $f(x) = |x - 5| + |x + 5|$.

i) Si $x \in \text{Dom } f = R$, se tiene que $-x \in \text{Dom } f = R$.

ii) Como $f(-x) = |-x - 5| + |- x + 5| = |x + 5| + |x - 5| = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom } f = R$, concluimos que f es una función par.

b) Para $g(x) = x^3\text{sen}x - 3x|x|$.

i) Si $x \in \text{Dom } f = R$, se tiene que $-x \in \text{Dom } f = R$.

ii) Como:

$g(-x) = (-x)^3\text{sen}(-x) - 3(-x)|-x| = (-x^3)(-\text{sen}x) + 3x|x| = x^3\text{sen}x + 3x|x| \neq g(x)$,

concluimos que g no es una función par ni impar.

NIVEL 2

Ejercicio 5

Demostrar que el producto de dos funciones pares o impares es una función par y el de una impar por una par da como resultado una función impar.

Demostración:

a) El producto de dos funciones pares es otra función par.

Sean f y g dos funciones pares, luego:

$f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$ $\forall$ $x, -x \in \text{Domf} \cap \text{Domg}$.

Ahora calculamos: $(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$, luego f.g es una función par.

b) El producto de dos funciones impares es una función par.

Sean f y g dos funciones impares, luego:

$$f(-x) = -f(x) \text{ y } g(-x) = -g(x)\ \forall\ x, -x \in \text{Domf} \cap \text{Domg}$$

Ahora calculamos: $(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = [-f(x)].[-\,g(x)] = f(x).g(x) = (f.g)(x)$,

luego f.g es una función par.

c) El producto de dos funciones, una par y otra impar, es una función impar.

Sean f una función par y g una función impar, luego:

$$f(-x) = f(x) \text{ y } g(-x) = -g(x) \text{ para todo } x, -x \in \text{Domf} \cap \text{Domg}.$$

Ahora calculamos: $(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = [f(x)].[-\,g(x)] = -f(x).g(x) = -\,(f.g)(x)$, luego f.g es una función impar.

NIVEL 3

Ejercicio 6

Analizar la paridad y periodicidad de la función definida por:

$f(x) = (-1)^n,\ x \in \,]n, n+1[$ donde $n \in Z$.

Resolución:

De acuerdo a los valores de n, tenemos: $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \bigcup\limits_{n \text{ impar}}]n, n+1[\\ 1, & x \in \bigcup\limits_{n \text{ par}}]n, n+1[\end{cases}$

Analicemos la paridad:

i) Para $x \in \text{Dom } f = R - Z$, se tiene que $-x \in \text{Dom } f = R - Z$.

ii) Para el estudio de esta parte, hacemos:

- Intervalos de la forma $]n, n+1[$ con n impar:

  Como $x \in \,]n, n+1[\ \Rightarrow n < x < n+1 \Rightarrow -n-1 < -x < -n$,

  donde n impar $\Rightarrow -n-1$ es par.

  Luego $f(-x) = 1 = -(-1) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar.

- Intervalos de la forma $]n, n+1[$ con n par:

  Como $x \in \,]n, n+1[\ \Rightarrow n < x < n+1 \Rightarrow -n-1 < -x < -n$, donde n par $\Rightarrow -n-1$ es impar.

  Luego $f(-x) = -1 = -(1) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar.

  Concluimos que f es una función impar.

Estudiaremos la periodicidad, aplicando para ello la definición:

i) Para $x \in \text{Dom } f = R$, se tiene que $(x + p) \in \text{Dom } f = R$.

ii) Para el estudio de ésta parte se tiene:

- Para intervalos de la forma $]n, n + 1[$ con n impar:

  $n < x < n + 1 \Rightarrow n + p < x + p < (n + p) + 1$. De acá se deduce que el análisis depende de p.

  Si p es un entero par: $f(x + p) = -1 = f(x)$ .... (1)

  Si p es un entero impar: $f(x + p) = 1 = -f(x)$

- Para intervalos de la forma $]n, n + 1[$ con n par:

  $n < x < n + 1 \Rightarrow n + p < x + p < (n + p) + 1$. De acá se deduce que el análisis depende de p.

  Si p es un entero par: $f(x + p) = 1 = f(x)$ .... (2)

  Si p es un entero impar: $f(x + p) = -1 = -f(x)$

Concluimos de (1) y (2) que el valor mínimo del período es p = 2 unidades.

Ejercicio 7

Determine si la siguiente función es par o impar:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & x \in \,]-4, -2[\, \cup \,]-1, 0[\\ 0, & x \in \{-1, 1\} \\ -\sqrt{4 - x^2}, & x \in \,]0, 1[\, \cup \,]2, 4[\end{cases}$$

Resolución:

Primera manera de realizar la demostración:

Aplicaremos la definición:

i) Analicemos $x \in \text{Domf} \Rightarrow -x \in \text{Domf}$

- Para $x \in \,]-4, -2[\, \cup \,]-1, 0[$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \,]-4, -2[\, \Rightarrow -4 < x < -2 \Rightarrow 2 < -x < 4 \Rightarrow -x \in \,]2, 4[\, \subset \text{Domf} \\ x \in \,]-1, 0[\, \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \Rightarrow -x \in \,]0, 1[\, \subset \text{Domf} \end{cases}$$

- Para $x \in \{-1, 1\}$ se cumple de inmediato que $-x \in \{-1, 1\}$.

- Para $x \in \,]0, 1[\, \cup \,]2, 4[$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \left]0, 1\right[\Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow -x \in \left]-1, 0\right[\subset \text{Domf} \\ x \in \left]2, 4\right[\Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow -4 < -x < -2 \Rightarrow -x \in \left]-4, -2\right[\subset \text{Domf} \end{cases}$$

Luego en cualquier caso se tiene que se cumple $x \in \text{Domf} \Rightarrow -x \in \text{Domf}$.

ii) En el siguiente análisis tendremos en cuenta lo ocurrido en la parte (i). Por ejemplo, notamos que:

$x \in \left]-4, -2\right[$, con $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, implica que $-x \in \left]2, 4\right[$ con $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

- Para $x \in \left]-4, -2\right[\cup \left]-1, 0\right[\Rightarrow$

$$-x \in \left]0, 1\right[\cup \left]2, 4\right[\Rightarrow f_2(-x) = -\sqrt{4 - (-x)^2} = -\sqrt{4 - x^2} = -f_1(x)$$

  Se deduce que f es una función impar.

- Para $x \in \left]0, 1\right[\cup \left]2, 4\right[\Rightarrow$

$$-x \in \left]-4, -2\right[\cup \left]-1, 0\right[\Rightarrow f_1(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = -f_2(x)$$

  Se deduce que f es una función impar.

- Para $x \in \{-1, 1\}$ es inmediato: función impar.

  Concluimos que f es una función impar en todo su dominio.

Segunda manera de realizar la demostración:

Aplicando la propiedad:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{función par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{función impar}}$$

Observamos que: $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = 0$, ya que:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & x \in \left]-4, -2\right[\cup \left]-1, 0\right[\\ 0 & x \in \{-1, 1\} \\ -\sqrt{4 - x^2}, & x \in \left]0, 1\right[\cup \left]2, 4\right[\end{cases}, \text{ implica que:}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x^2}, & -x \in \left]2, 4\right[\cup \left]0, 1\right[\\ 0, & x \in \{-1, 1\} \\ \sqrt{4 - x^2}, & x \in \left]-4, -2\right[\cup \left]-1, 0\right[\end{cases}, \text{ con lo cual se tiene } \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 0$$

Luego afirmamos que f(x) se puede escribir bajo la forma: $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ siendo por lo tanto una función impar.